

人口転換の数理モデル

A Mathematical Model for Demographic Transition

稲葉 寿・齋藤 涼平 (東京大学大学院数理科学研究科)

Hisashi Inaba and Ryohei Saito

Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo

inaba@ms.u-tokyo.ac.jp

1 基本モデル：感染現象としての出生力転換

本研究では、人口転換 (demographic transition) とよばれる人口学的現象を、感染症数理モデル [2] として定式化し、その振る舞いを数学的に解析することを試みる。周知のように、人口転換とは、高い死亡率・高い出生率 (多産多死) の状態から低い死亡率・高い出生率 (多産少死) を経て低い死亡率・低い出生率 (少産少死) に至る一連の歴史的な人口再生産様式の遷移過程をさす。人口転換の要因に関しては、おおまかにいえば、二つの仮説がある。ひとつは近代化仮説であり、経済発展に伴う乳幼児死亡率低下、避妊手段の開発、工業化・都市化といった全般的近代化が少産動機を生み出し、出生率低下を促したという社会経済的環境変化を重視する立場であり、他方は出生率低下の拡散理論 (diffusion theory)、すなわち少産動機が初めに都市の中産階層に生まれ、これが次第に他の階層ないし集団に受容され、拡散していったとする考えである。拡散説の特徴は、かならずしも社会経済要因が整わなくても、低出生力集団の再生産様式の模倣がおきうるというダイナミカルな仮定にある。本研究では、人口転換の拡散モデルとして、低い出生力をもつ個体 (感染個体/Infected) からから高い出生力をもつ個体 (感受性個体/Susceptible) へと少産動機が「感染」し、感染した個体は低出生力個体を再生産するという人口転換 (出生力転換) に関する感染症数理モデルを提案する。本研究で考察するのは以下のモデルである：

$$\begin{aligned}\frac{\partial S(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial S(t, a)}{\partial a} &= -(\mu(a) + \lambda(t, a))S(t, a) \\ \frac{\partial I(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial I(t, a)}{\partial a} &= \lambda(t, a)S(t, a) - \mu(a)I(t, a) \\ S(t, 0) &= \int_0^\infty m_1(a)S(t, a) da \\ I(t, 0) &= \int_0^\infty m_2(a)I(t, a) da\end{aligned}\tag{1.1}$$

ここで、 $\mu(a)$, $m_1(a)$, $m_2(a)$ はそれぞれ年齢別死亡率、高出生力人口 (S) の出生率、低出生力人口 (I) の出生率を表す。そこで、 $m_1(a) > m_2(a)$ と仮定される。 $\lambda(t, a)$ は感染力であり、以下で与えられる：

$$\lambda(t, a) := \frac{1}{N(t)} \int_0^{\infty} \beta(a, \sigma) I(t, \sigma) d\sigma$$

ただし、 $\beta(a, \sigma)$ は年齢 a の高出生力個体と年齢 σ の低出生力個体間における伝達係数、 $N(t)$ は時刻 t における総人口 $N(t) := \int_0^{\infty} (S(t, a) + I(t, a)) da$ である。

2 主要な結果

基本システム (1.1) は一次同次の非線形システムであり、定常解のかわりに指数関数解の存在とその安定性が問題となる。このようなシステムの解析法は [1, 3] において開発された。システム (1.1) には二つの自明な指数関数的成長解（境界指数成長解）が存在する。一つは高い出生力を持つ人口のみが存在する安定人口であり、もう一つは低い出生力をもつ人口のみからなる安定人口である。それ以外に二つのタイプの人口が共存する指数成長解が存在するための十分条件を得た。その条件の一つは、(a) 両人口のマルサスパラメータの差が伝達率の上限より大きいこと; (b) ある種の正積分作用素のスペクトル半径が 1 より大きくなること、である。条件 (b) は、高い出生力を持つ人口のみからなる安定人口軌道が不安定化する条件でもある。すなわち、高出生力の安定人口状態に少数の低出生人口が現れて侵入に成功する場合にほかならない。一方、条件 (a) は、低出生力の安定人口に高出生力集団が発生して、侵入に成功する条件である。その場合は、絶えず低出生力への個体レベルでの「転換」（感染）が起きているにもかかわらず、より高い出生力の軌道への転換が起きる可能性がある。ただし、年齢構造を無視した単純な場合を除き、大域的な安定軌道の交換が起きるかどうかはまだ不明である。

参考文献

- [1] Iannelli, M. and Martcheva, M.: Homogeneous dynamical systems and the age-structured SIR model with proportionate mixing incidence, In: Iannelli, M. and Lumer, G. (eds.): Evolution Equations: Applications to Physics, Industry, Life Sciences and Economics, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Vol. 55, Birkhäuser, Basel Boston Berlin, 227-251 (2003)
- [2] Inaba, H.: Age-Structured Population Dynamics in Demography and Epidemiology, Springer Singapore (2017)
- [3] Webb, G. F.: Asynchronous exponential growth in differential equations with homogeneous nonlinearities, In Differential Equations in Banach Spaces, Dore, G., Favini, A., Obrecht, E. and Venni, A. (eds.), Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 148, Dekker, New York, 225-233 (1993)